DEVOIR MAISON V VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1 **EML** 2020 Exercice 2 (légèrement modifié).
On définit, pour tous réels a et b la matrice $M(a,b)$ par

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. **a.** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.

b. Le produit de deux matrices quelconque de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

a. Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

b. En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

a. On considère le programme Python suivant :

Date: 7 Janvier 2026.
http://louismerlin.fr.

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as alg
3
4 b=3
5
6 B = np.array([[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[b,b,b,b]])
7
8 r0 = alg.matrix_rank(B)
9 rb = alg.matrix_rank(B-b*np.eye(4))
10
11 print("r0 = ",r0)
12 print("rb = ",rb)
```

L'exécution de ce programme retourne

```
r0 = 1
rb = 3
```

et on admet que ce retour ne change pas lorsqu'on modifie la valeur de b à la ligne 4 du programme. Que peut-on conjecturer sur les valeurs propres de B et la dimension des espaces propres associés.

b. Vérifier les conjectures faites à la question précédente.

c. La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M(a,b)$. On pose

$$v_1 = (1,1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.

b. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

d. Soit λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Montrer que X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ *si et seulement si* ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ et $z = t = 0$).

e. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,1)$
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1,1)$ est diagonalisable.

f. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,-1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1,-1)$ est-elle diagonalisable ?

g. Montrer l'équivalence

$$M(a,b) \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow a^2 + 10ab + b^2 > 0.$$

EXERCICE 2 **ECRICOME 2023** 2ème sujet 0 Exercice 1.

Soit $p \in]0,1[$. On considère une pièce donnant Pile avec probabilité p. On effectue une succession de lancers indépendants de cette pièce jusqu'à l'obtention du 2ème Pile.

On note X_1 le rang d'apparition du premier Pile et X_2 le nombre de lancers supplémentaires effectués après le premier Pile jusqu'à l'apparition du 2ème Pile.

Par exemple si les lancers donnent dans cet ordre :

Face, Pile, Face, Face, Face, Pile

alors $[X_1 = 2]$ et $[X_2 = 4]$ se réalisent.

1. Reconnaître la loi de X_1 et la loi de X_2.

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

3. En déduire que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$P(X_1 + X_2 = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus sur toute l'expérience.

5. Recopier et compléter la fonction Python suivante, prenant en argument d'entrée le réel $p \in]0,1[$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.

```
import numpy.random as rd

def simul_Y(p):
  Y = 0
  nb_pile = 0
  while ............. :
    if ............... :
      nb_pile = nb_pile + 1
    else :
      .............
  return Y
```

6. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2.

7. En déduire l'espérance de Y, la variance de Y et la loi de Y.

Une fois le second Pile obtenu, si l'on a obtenu un nombre n de Face, alors on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On effectue alors un tirage unique dans cette urne et on note U la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue. On note également $V = Y - U$.

8. Écrire une fonction Python simul_UV, prenant en argument d'entrée la valeur du réel $p \in]0,1[$, et renvoyant une simulation du couple (U, V). On pourra faire appel à la fonction simul_Y définie à la question **5**.

9. Justifier que $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et préciser $V(\Omega)$.

10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(U = k)$.

11. Montrer que la variable $U + 1$ suit une loi usuelle que l'on reconnaîtra.
En déduire l'espérance et la variance de U.

12. Montrer que V suit la même loi que U.

13. **a.** Montrer que U et V sont indépendantes.

b. En déduire la covariance du couple (Y, U).

c. Montrer que le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y, U) est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.